БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Институт интегрированных форм обучения и мониторинга образования

VI ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА ОБУЧАЮЩИХСЯ ”ШАГ К ИННОВАЦИЯМ“

Заключительный этап 2020 г.

Демонстрационная версия

Примеры заданий

1. В контейнер упакованы изделия двух типов. Стоимость и масса одного изделия первого типа составляют соответственно 400 рублей и 12 кг и 600 рублей и 15 кг одного изделия второго типа. Общая масса изделий равна 321 кг. Определите минимальную и максимальную возможные стоимости находящихся в контейнере изделий.

Решение

Пусть m и n – число изделий I и II типа.

По условию $12m+15n=321$. Разделив правую и левую часть на 3, получим $4m+5n=107$.

Найдём стоимость контейнера k:

$$k=400m+600n=100(4m+6n)=\begin{bmatrix}4m+5n=107\\4m+6n=107+n\end{bmatrix}=100(107+n).$$

Заметим, что величина k будет минимальной при наименьшем возможном n и максимальной при наибольшем возможном n (n и m – натуральные числа).

Из равенства $4m+5n=107$ выразим m:

$$m=\frac{107-5n}{4}=\frac{107-n-4n}{4}=\frac{107-n}{4}-n.$$

Так как m и n натуральные числа, то $107-n$ должно делиться на 4 без остатка.

Подберём возможные значения n: n = 3, 7, 11, 15, 19.

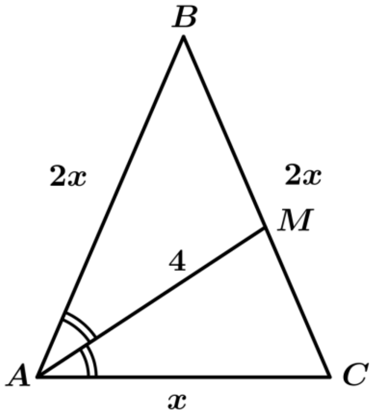
Отсюда следует, что n = 3 – наименьшее.

Значит минимальное значение $k=100(107+3)=100\cdot110=11000$ рублей.

Так как $n = 19$ – наибольшее, то максимальное значение $k = 100(107 + 19) = 100 \cdot 126 = 12600$ рублей.

Ответ: 11000 рублей; 12600 рублей.

2. В треугольнике *ABC* биссектриса угла *BAC* пересекает сторону *BC* в точке *M*. Известно, что *AB* = *BC* = 2*AC*, *AM* = 4. Найдите стороны треугольника *ABC* и его площадь.



Решение

Пусть сторона *AC* = *x*. Тогда *AB* = *BC* = 2*x*. Тогда

$$\cos\angle C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{x^2 + 4x^2 - 4x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}.$$

По свойству биссектрисы $\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2x}{x} = \frac{2}{1}$.

Значит $MC = \frac{1}{3}BC = \frac{2}{3}x$.

Применим теорему косинусов для треугольника *AMC*:

$$16 = \frac{4}{9}x^2 + x^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}x \cdot x.$$

Решив уравнение, получим

$$16 = \frac{10}{9}x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{16 \cdot 9}{10} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{10}} = \frac{12}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{5}.$$

Тогда $AC = \frac{6\sqrt{10}}{5}$; $AB = BC = \frac{2 \cdot 6\sqrt{10}}{5} = \frac{12\sqrt{10}}{5}$.

Так как $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot CB \cdot \sin\angle C$,

учитывая, что $\sin\angle C = \sqrt{1 - \cos^2\angle C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

получим $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{x^2\sqrt{15}}{4} = \frac{16 \cdot 9 \cdot \sqrt{15}}{10 \cdot 4} = \frac{18\sqrt{15}}{5}$ ед^2.

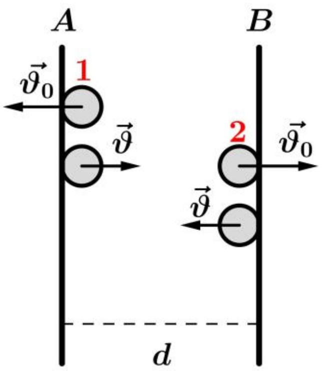
Ответ: $\frac{6\sqrt{10}}{5}$; $\frac{12\sqrt{10}}{5}$; $\frac{18\sqrt{15}}{5}$ ед^2.

3. Две вертикальные однородно заряженные пластины расположены в вакууме на расстоянии d = 38,0 мм друг от друга. Между пластинами на длинной легкой нерастяжимой нити подвешен небольшой заряженный ($|q_0|$ = 400 пКл) шарик массой m = 100 мг, который движется, поочередно ударяясь о пластины. При ударе о каждую из пластин шарик теряет η = 19,0% своей кинетической энергии. В момент каждого удара шарик перезаряжают, и знак его заряда изменяется на противоположный. Если модуль напряженности однородного электростатического поля между пластинами $E = 100\,\frac{\text{кВ}}{\text{м}}$, то период T ударов шарика об одну из пластин равен ... мс.

Решение

Дано:
d = 38,0 мм;
$|q_0|$ = 400 пКл;
m = 100 мг;
η = 19,0%;
$E = 100\,\frac{\text{кВ}}{\text{м}}$.

T – ?



Шарик, имея скорость $\overrightarrow{\vartheta_0}$, ударяется о пластину A и отскакивает от неё со скоростью $\vec{\vartheta}$. Потом разгоняется электрическим полем до скорости $\overrightarrow{\vartheta_0}$ и ударяется о пластину B. Потом процесс повторятся в обратном направлении.

Искомый период определяем следующим образом.

$T = 2t$ (1), где t – время движения шарика от пластины A до пластины B, $t = \frac{d}{\vartheta_{\text{ср}}}$ (2), $\vartheta_{\text{ср}} = \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2}$ (3).

Определяем $\vartheta_{\text{ср}}$: т.к. шарик теряет при ударе η = 19,0% своей энергии, то $W_{\text{к}} = 0{,}81 W_{0\text{к}}$ (4), $W_{\text{к}}$ – оставшаяся кинетическая энергия шарика после удара.

Распишем уравнение (4): $\frac{m\vartheta^2}{2} = 0{,}81\frac{m\vartheta_0^2}{2} \Rightarrow \vartheta = 0{,}9\vartheta_0$ (5).

Подставим (5) в уравнение (3): $\vartheta_{\text{ср}} = \frac{\vartheta_0 + 0{,}9\vartheta_0}{2} = 0{,}95\vartheta_0$. Затем в (2): $t = \frac{d}{0{,}95\vartheta_0}$ (6).

ϑ_0 определим из условия, что потерянную энергию при ударе о пластину шарик восстанавливает при разгоне в электрическом поле при движении к противоположной пластине.

$A_{\text{эл}} = 0{,}19 W_{0\text{к}}$, $qEd = 0{,}19\frac{m\vartheta_0^2}{2} \Rightarrow \vartheta_0 = \sqrt{\frac{2qEd}{0{,}19m}}$.

Из (6) $t = \frac{d}{0{,}95}\sqrt{\frac{0{,}19m}{2qEd}}$, $t = 10$ мс, тогда T = 20 мс.

Ответ: 20 мс.

4. Дан черный ящик. Если на клеммы 1, 2 подать напряжение U_{1-2} = 220 В, то на клеммах 3, 4 снимается напряжение U_{3-4} = 110 В, а если подать на клеммы 3, 4 напряжение U_{3-4} = 220 В, то на клеммах 1, 2 снимается напряжение U_{1-2} = 220 В. Что находится в черном ящике? (Напряжение измерялось идеальным вольтметром.)

Решение

Обыкновенный делитель напряжения: