



БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ



Институт интегрированных форм
обучения и мониторинга образования

IV ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА ОБУЧАЮЩИХСЯ

”ШАГ К ИННОВАЦИЯМ“

Заключительный этап 2018 г.

Демонстрационная версия

Примеры заданий

1. Две мастерские вместе должны отремонтировать по плану 54 мотора. Если первая мастерская выполнит 120%, а вторая – 125% запланированной работы, то каким может быть количество моторов, отремонтированных каждой бригадой?

Решение

Пусть x – количество моторов, которые должна отремонтировать первая мастерская; y – количество моторов, которые должна отремонтировать вторая мастерская.

Тогда, по условию задачи, $x + y = 54$, где $x \in N$ и $y \in N$.

Если первая мастерская выполнит 120% – т.е. $1,2x = \frac{6}{5}x$, а вторая мастерская выполнит 125% – т.е. $1,25y = \frac{5}{4}y$, то вместе они выполнят

$$\frac{6}{5}x + \frac{5}{4}y \in N.$$

Значит, x должно делиться на 5, а y должно делиться на 4.

Тогда возможные значения x :

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50.

Возможные значения y :

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52.

Так как $x + y = 54$, возможны варианты:

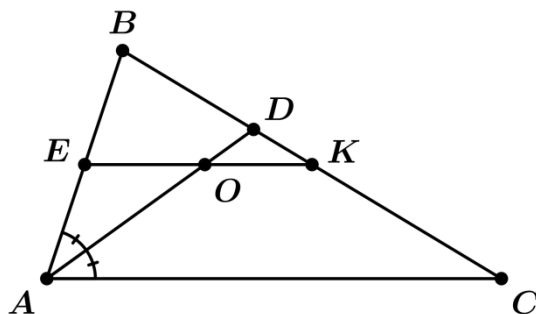
$$1) x = 10, y = 44 \Rightarrow \frac{6}{5} \cdot 10 = 12, \frac{5}{4} \cdot 44 = 55.$$

$$2) x = 30, y = 24 \Rightarrow \frac{6}{5} \cdot 30 = 36, \frac{5}{4} \cdot 24 = 30.$$

$$3) x = 50, y = 4 \Rightarrow \frac{6}{5} \cdot 50 = 60, \frac{5}{4} \cdot 4 = 5.$$

Ответ: количество отремонтированных каждой бригадой моторов может быть: 12 и 55, 36 и 30, 60 и 5.

2. В треугольнике ABC биссектриса AD пересекает среднюю линию EK , параллельную стороне AC , в точке O . Найдите отношение $EO : OK$, если $BD : DC = 3 : 4$.



Решение

По свойству биссектрисы $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, тогда $AB = 3x$, $AC = 4x$.

Так как EK – средняя линия треугольника, то

$$EK = \frac{1}{2}AC = 2x, \text{ а } AE = EB = \frac{3}{2}x.$$

Рассмотрим треугольник AEO : $\angle CAO = \angle EOA$ – как накрест лежащие углы при параллельных прямых.

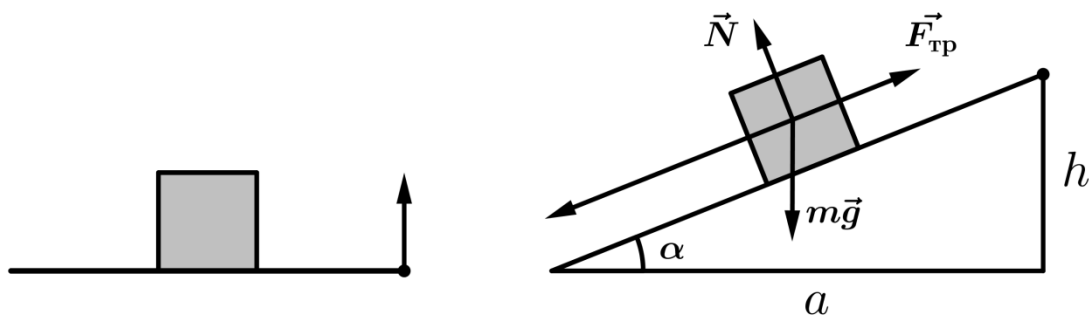
Следовательно, $\angle EAO = \angle EOA$; значит, треугольник AEO является равнобедренным и $AE = EO = \frac{3}{2}x$.

Тогда $OK = EK - EO = 2x - 1,5x = 0,5x$.

Значит, $\frac{EO}{OK} = \frac{1,5x}{0,5x} = \frac{3}{1}$.

Ответ: $EO : OK = 3 : 1$.

3. Каким образом можно определить коэффициент трения скольжения между небольшим бруском и какой-то поверхностью? Динамометр не использовать.



Решение

Брусок поместили на поверхность. Поверхность вместе с бруском начинаем приподнимать за один конец, изменяя угол наклона поверхности к горизонту. При каком-то угле наклона α брусок начнет соскальзывать с поверхности. Зафиксируем этот момент. У нас образовалась наклонная

плоскость высотой h и основанием a . Измеряем высоту и основание. В момент начала скольжения тела максимальная сила трения покоя равна

$$F_{n.m.} = mg \sin \alpha .$$

В этот же момент тело начинает скользить. Следовательно, сила трения скольжения равна

$$F_{тр.ск.} = \mu N ,$$

где μ – коэффициент трения скольжения.

Сила давления тела на поверхность равна

$$N = mg \cos \alpha \Rightarrow F_{тр.ск.} = \mu mg \cos \alpha ;$$

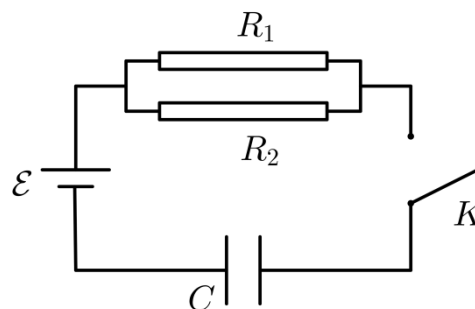
$$F_{тр.ск.} = F_{n.m.} ;$$

$$\mu mg \cos \alpha = mg \sin \alpha \Rightarrow \mu = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha .$$

Из рисунка видно, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{a}$, следовательно, $\mu = \frac{h}{a}$.

Ответ: $\mu = \frac{h}{a}$.

4. В схеме, показанной на рисунке, перед замыканием ключа K конденсатор емкостью $C = 2$ мкФ не был заряжен. Ключ замыкают на некоторое время, в течение которого конденсатор полностью зарядился. Какое количество теплоты выделится за это время на резисторе $R_2 = 4$ Ом. Э.д.с. источника тока $\mathcal{E} = 10$ В, сопротивление $R_1 = 16$ Ом. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.



Решение

При замыкании цепи конденсатор зарядится. Энергия на конденсаторе станет равной $W_c = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$, а заряд $q = C\mathcal{E}$. При зарядке источник тока совершил работу $A = \mathcal{E}q$.

$$A = W_c + Q_1 + Q_2 ;$$

$$\mathcal{E}q = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} + Q_1 + Q_2;$$

$$\mathcal{E}^2 C = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} + Q_1 + Q_2;$$

$$\frac{C\mathcal{E}^2}{2} = Q_1 + Q_2.$$

Исключаем Q_1 . т.к. $Q_1 = \frac{U^2}{R_1}t$, $Q_2 = \frac{U^2}{R_2}t$, то $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow Q_1 = \frac{Q_2}{4}$.

$$\frac{C\mathcal{E}^2}{2} = \frac{5}{4}Q_2;$$

$$Q_2 = \frac{2\mathcal{E}^2 C}{5} = 80 \cdot 10^{-6} \text{ Дж} = 80 \text{ мкДж}.$$

Ответ: 80 мкДж.