



БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ



Институт интегрированных форм
обучения и мониторинга образования
III ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА ОБУЧАЮЩИХСЯ
"ШАГ К ИННОВАЦИЯМ"

Заключительный этап 2017 г.

Демонстрационная версия

Примеры заданий

1. Инженеры сконструировали две авиамодели с моторчиками. При встречном ветре первая модель продержалась в воздухе на m мин меньше второй, но пролетела на h м дальше. Скорость ветра равна v м/мин, но на продолжительность полёта модели ветер не влияет; от ветра зависит только дальность полёта. Какая из этих моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде, если их собственные скорости постоянны?

Решение

Пусть z мин - продолжительность полёта первой модели.

Тогда $z+m$ мин - продолжительность полёта второй модели.

Если x м/мин. и y м/мин - собственные скорости полёта первой и второй моделей соответственно, то первая модель пролетела $(x - v)z$ м, вторая – $(y - v)(z + m)$ м.

Тогда составим уравнение:

$$(x - v)z = (y - v)(z + m) + h \Leftrightarrow$$

$$xz - vz = yz + ym - vz - vm + h.$$

Выполнив преобразования получим:

$$xz - y(z + m) = h - vm.$$

Так как xz и $y(z + m)$ - расстояния, которые могут пролететь модели в безветренную погоду, то можно заключить, что первая модель пролетит большее расстояние если $h > vt$;

вторая модель пролетит большее расстояние, если $h < vt$;

обе модели пролетят одинаковые расстояния если $h = vt$.

2. Для детали необходимо сделать каркас в виде полуокружности, в который затем поместят два ролика (круга) радиусов $\sqrt{19}$ и $\sqrt{76}$. Ролики должны касаться друг друга внешним образом, а также касаться полуокружности и её диаметра. Вычислите радиус каркаса.

Решение

Пусть O - центр полуокружности; O_1, O_2 - центры окружностей вписанных в полуокружность (рис. 1).

A и B - точки касания окружностей с диаметром полуокружности;

N и M - точки касания окружностей с дугой;

L - точка касания окружностей.

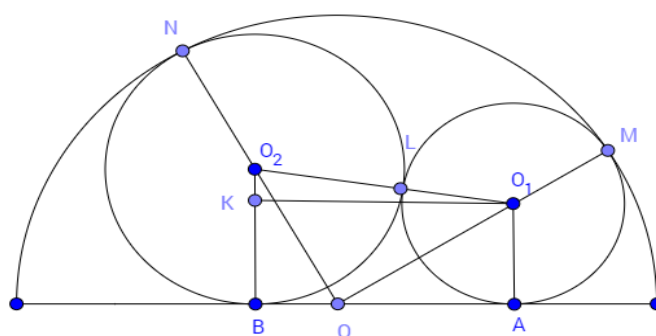


рис. 1

Введём обозначения для удобства записи:

$$O_1A = \sqrt{19} = r_1; O_2B = \sqrt{76} = 2\sqrt{19} = r_2; OM = ON = R.$$

Заметим, что $r_2 = 2r_1$; $AB = O_1K$ и $O_1O_2 = r_1 + r_2 = 3\sqrt{19}$.

В треугольнике O_2KO_1 $KO_1 = AB = \sqrt{(3r_1)^2 - r_1^2} = 2\sqrt{2}r_1$.

Пусть

$$AO = x; BO = y, \text{ тогда } x + y = 2\sqrt{2}r_1 \quad (*)$$

Рассмотрим треугольник $ОАО_1$ и $ОВО_2$, где $О О_1 = R - r_1, ОО_2 = R - r_2 =$
 $= R - 2r_1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} (R - r_1)^2 = r_1^2 + x^2 \\ (R - 2r_1)^2 = (2r_1)^2 + y^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{R^2 - 2Rr_1} \\ y = \sqrt{R^2 - 4Rr_1} \end{array} \right.$$

Используя формулу (*) получим уравнение:

$$\sqrt{(R^2 - 2Rr_1)} + \sqrt{(R^2 - 4Rr_1)} = 2\sqrt{2}r_1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(R^2 - 2Rr_1)} = 2\sqrt{2}r_1 - \sqrt{(R^2 - 4Rr_1)}.$$

Возведём обе части уравнения в квадрат и упростив, получим:

$$7R^2 - 24Rr_1 - 16r_1^2 = 0$$

Так как $r_1 = \sqrt{19}$. Запишем квадратное уравнение

$$7R^2 - 24\sqrt{19}R - 16 \cdot 19 = 0$$

$$D/4 = 12^2 \cdot 19 + 16 \cdot 19 \cdot 7 = 19 \cdot 16^2$$

$$R_1 = \frac{12\sqrt{19} - 16\sqrt{19}}{7} < 0 \text{ - не подходит по смыслу задачи;}$$

$$R_2 = \frac{12\sqrt{19} + 16\sqrt{19}}{7} = 4\sqrt{19}.$$

Ответ: $4\sqrt{19}$.

3. Амперметр и вольтметр, которые подключены к аккумулятору последовательно, показывают соответственно $I_1 = 0,1\text{А}$ и $U_1 = 10\text{В}$. Соединенные параллельно и подключенные к тому же источнику, они показывают соответственно $I_2 = 1\text{А}$ и $U_2 = 1\text{В}$. Определить ток короткого замыкания.

Решение

Дано:

$$I_1 = 0,1\text{А};$$

$$U_1 = 10\text{В};$$

$$I_2 = 1\text{А};$$

$$U_2 = 1\text{В}.$$

Найти:

Ток короткого замыкания

При последовательном соединении амперметра и вольтметра сила тока равна:

$$I_1 = E / (R_a + R_v + r) , \quad (1)$$

где E – э.д.с. аккумулятора;

R_a – сопротивление амперметра;

R_v – сопротивление вольтметра;

r - внутреннее сопротивление аккумулятора.

По закону Ома для участка цепи :

$$I_1 = U_1 / R_v . \quad (2)$$

При параллельном соединении приборов:

$$U_2 = (E \cdot R_v \cdot R_a / R_a + R_v) / [R_v \cdot R_a / (R_a + R_v) + r] . \quad (3)$$

По закону Ома для участка цепи :

$$I_2 = U_2 / R_a . \quad (4)$$

Ток короткого замыкания равен:

$$I_{к.з.} = E / r \quad (5)$$

Из формул (2) и (4) получим значения $R_v = 100$ Ом, $R_a = 1$ Ом.

Находим ток короткого замыкания:

$$I_{к.з.} = (R_v^2 + R_v \cdot R_a + R_a^2) \cdot I_1 \cdot U_2 / R_v \cdot R_a \cdot [I_1 \cdot (R_a + R_v) - U_2]$$

$$I_{к.з.} = 1,01 \text{ A}.$$

4. Каким образом можно определить энергию пружины заводного детского автомобиля при определенном числе оборотов заводки?

По возможности при выполнении задания использовать минимальное количество оборудования.

Один из вариантов решения задания

Необходимое оборудование:

- весы,
- рулетка,
- наклонная плоскость.

Энергия заведенной пружины в детском автомобиле будет численно равна работе силы трения при движении автомобиля по горизонтальной поверхности до полной остановки:

$$E_n = \mu \cdot m \cdot g \cdot s , \quad (1)$$

где m - масса автомобиля определяется с помощью весов;

s - путь до полной остановки можно измерить с помощью рулетки.

Для определения коэффициента трения используется наклонная плоскость. Автомобиль должен двигаться с верхней точки наклонной плоскости из состояния покоя. Измерим длину (l) и высоту (h) наклонной плоскости и пройденный путь (s_1) автомобиля до полной остановки. Используя теорему о кинетической энергии, получим:

$$m \cdot g \cdot h - \mu \cdot m \cdot g \cdot l \cdot \cos \alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot s_1 = 0. \quad (2)$$

Из данного уравнения выразим коэффициент μ и подставим в уравнение (1).